Lösningar till Tentamenstal i Tekniska beräkningar Kf, HT 1999

—————————-

Uppgift 1

a) a kan skrivas som en linjärkombination av v_j

$$a = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j$$

samma gäller för b:

$$b = \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j$$

Då blir $a + b$:

$$a + b = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j + \sum_{j=1}^{m} \mu_j v_j = \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j + \mu_j) v_j$$

vilket är en ny linjärkombination av v_j med koefficienter $(\lambda_j + \mu_j)$. Detta medför att $a + b$ ligger i V.

b) Med a enligt föregående uppgift:

$$a = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j$$

blir μa:

$$a = \mu \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j = \sum_{j=1}^{m} \mu \lambda_j v_j$$

vilket är en linjärkombination av v_j med koefficienter $\mu\lambda_j$ vilket medför att μa tillhör V.

Uppgift 2

Låt V vara ett delrum till $\mathbb{R}^n$. Låt P beteckna projektionen på V. En godtycklig vektor $x \in \mathbb{R}^n$ kan då skrivas som

$$x = Px + (x - Px)$$

a) Projektionen definieras av

$$(v - Pv, w) = 0, \text{ för alla } w \in V,$$

Dessutom vet vi att $Px \in V$. Välj w i ekvationen ovan till Px detta ger då:

$$(x - Px, Px) = 0$$

vilket är det önskade resultatet.

b) Sätt $x = Px + (x - Px)$ vilket ger:

$$||x||^2 = (Px+(x-Px), Px+(x-Px)) = (Px, Px)+2(Px, x-Px)+(x-Px, x-Px) =$$

$$||Px||^2 + 2(Px, x - Px) + ||x - Px||^2 = ||Px||^2 + ||x - Px||^2.$$

ty $(x - Px, Px) = 0$ enligt a).

Uppgift 3

Projektionen definieras av

$$(v - Pv, w) = 0, \text{ för alla } w \in V,$$

a) Vi vill visa att $PPv = Pv$. För PPv gäller följande:

$$(Pv - PPv, w) = 0, \text{ för alla } w \in V,$$

för Pv gäller:

$$(v - Pv, w) = 0, \text{ för alla } w \in V,$$

vilket medför att $(v, w) = (Pv, w)$ för alla w i V. Detta tillsammans ger då:

$$(Pv - PPv, w) = (Pv, w) - (PPw, w) = (v, w) - (PPv, w) = (v - PPv, w) = 0$$

för alla w i V men detta medför att $PPv = Pv$. vilket visar $PP = P$. Ett annat sätt att visa samma sak är att inse att $Pv \in V$ samt att $PPv \in V$. Detta medför att vi kan välja $w = Pv - PPV$ och vi får då följande

$$(Pv - PPv, w) = (Pv - PPv, Pv - PPv) = ||Pv - PPv||^2 = 0$$

men för normen av en vektor gäller $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$ vilket visar att $Pv = PPv$.

b) För två godtyckliga vektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$ gäller

$$(P^T v, u) = (v, Pu) = (Pv, Pu) = (Pv, u) \Rightarrow P^T = P.$$

Där vi har uttnyttjat (v, w) = (Pv, w) för alla w i V, samt att $Pv \in V$ och $Pu \in V$.

Uppgift 4

a) Med ett godtyckligt w i V får vi följande

$$||v - Pv||^2 = (v - Pv, v - Pv) = (v - Pv, v - w) + (v - Pv, w - Pv) =$$

$$(v - Pv, v - w) \leq ||v - Pv||||v - w||,$$

ty $(v - Pv, w - Pv) = 0$ eftersom $w, Pv \in V$. Efter division med $||v - Pv||$ får vi

$$||v - Pv|| \leq ||v - w|| \text{ för alla } w \in V.$$

b) Pv kan beräknas ur relationen

$$(v - Pv, w) = 0, \text{ för alla } w \in V.$$

Bilda en bas till V $\{g_1, g_2, ..., g_m\}$ då kan vi skriva Pv som en linjär kombination av dessa basvektorer

$$Pv = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j.$$

För att bestämmas Pv måste vi räkna ut $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ detta görs genom att sätta använda definitonen för Pv och notera att om $v - Pv$ är ortogonal mot alla g_i, $i = 1, ..., m$ så är $v - Pv$ ortogonal mot alla vektorer i V. Detta ger oss då ett linjär ekvationssystem för koefficienterna λ vilket löses med t ex Gausseliminering.

Uppgift 5

Q är en ortonormal matris, dvs

$$Q^TQ = QQ^T = I$$

detta ger då

a)

$$(Qx, Qy) = (x, Q^TQy) = (x, Iy) = (x, y).$$

b) Skalärprodukten är invariant under ortonormala avbildningar.

Uppgift 6

Låt A vara en $m \times n$ matris med linjärt oberoende kolumner.

a) För transponat gäller $(AB)^T = B^TA^T$. I vårt fall har vi

$$(A^TA)^T = A^TA$$

vilket visar att A^TA är symmetrisk.

b) Antag att $A^TAx = 0$ om A^TA är icke-singulär medför detta att $x = 0$. Vi har följande

$$0 = (A^TAx, x) = (Ax, Ax) = ||Ax||^2 \Rightarrow Ax = 0$$

men matris-vektor produkten Ax är ju

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j$$

dvs vi kan se Ax som en linjärkombination av As kolumner. Dessa är linjärt oberoende enligt förutsättningarna. Vi vet att om en linjärkombination av linjärt oberoende vektorer är noll så är vektorn noll. Så $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ dvs vi har visat att A^TA är ickesingulär.

Uppgift 7

Låt A vara en $m \times n$ matris med linjärt oberoende kolumner.

a) $R(A)$ definieras av

$$R(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : y = Ax, x \in \mathbb{R}^n\}$$

så om $Ax = b$ så måste $b \in R(A)$. Eftersom As kolumner är linjärt oberoende och Ax är en linjär kombination av As kolumner (se föregående uppgift) så kan x bestämmas entydigt, dvs $Ax = b$ har en lösning.

b) Att minimera $||Ax - b||^2$ där $Ax \in R(A)$ och $b \in \mathbb{R}^m$ betyder att vi skall hitta kortaste avståndet mellan Ax och b. Kalla $x^* = Ax$ vi har då följande minimeringsproblem

$$\min_{x^* \in R(A)} ||x^* - b||^2$$

lösningen till detta fås ur

$$(x^* - b, w) = 0, \text{ för alla } w \in R(A)$$

eller

$$(x^* - b, Ax) = 0, \text{ för alla } x \in \mathbb{R}^n$$

vilket ger

$$(Ax - b, Ax) = (A^T Ax - A^T b, x) = 0, \text{ för alla } x \in \mathbb{R}^n$$

vilket ger oss normalekvationerna $A^T Ax = A^T b$.

Uppgift 8

a) Att genom elementär radoperation skriva om matrisen A på övertriangulär form. Om man t ex vill eliminera kolumn 1 i alla rader utom den första så tas $(radi) - a(i,1)/a(1,1)(rad1)$. Sedan elimineras 2:a kolumnen i rad $3 - n$ på samma sätt. Samt att högerledet uppdateras. För matrisen gäller

```
for k = 1: n-1
   for j = k+1: n
      aa = a(j, k) / a(k, k)
      for m = k+1:n
         a(j, m) = a(j, m) - aa*a(k, m)
      end
      b(j) = b(j) - aa*b(k)
   end
end
```

b) Pivotering är när man byter plats på två rader för att lösa problem med ett diagonalelement som är noll. I algoritmen ovan måste vi dividera med diagonalelementen. Detta kan inte utöras om dessa är noll. Om detta inträffar byts plats på två rader så att man får ett nollskilt diagonalelement.

c) $n^3/3$

d) 10^3 sekunder dvs knappt 20 minuter.

Uppgift 9

Betrakta ekvationssystemet $Ax = b$. Antag nu att matrisen A är LU-faktoriserad, $A = LU$, (ingen pivotering har utförts).

a) Hur kan LU användas för att lösa ekvationen $Ax = b$ effektivt? Vi vet att system av typen $Lx = b$ och $Ux = b$ kan lösas effektivt mha framåt- repsektive bakåtsubstitution. Vi kan då lösa $Ax = b$ i två steg enligt följande

$$LUx = b \Rightarrow$$

$$Ly = b$$

$$Ux = y$$

b) Arbetet för en framåt- eller bakåtsubstitution är ca $n^2/2$. För att lösa $Ax = b$ krävs en framåt- och en bakåtsubstitution vilket ger totalt: $2\frac{n^2}{2}$.

c) Beskriv hur kan detta användas för att räkna ut A^{-1}. Vi vet att inversen definieras av $AA^{-1} = I$. Vi kan nu beräkna en kolumn i taget för A^{-1} genom att lösa n stycken system av typen

$$LUA^{-1}(k,:) = I(k,:)$$

med algoritmen ovan.

Uppgift 10

Börja med att utveckla determinanten längs sista raden. Detta ger endast ett bidrag med $+a_{n,n}\det(A_{n-1})$. Där A_{n-1} är den matris som fås av As $n-1$ första rader och $n-1$ första kolumner. Men denna matris är övertriangulär precis som A och operationen ovan kan appliceras på denna matris.

$$\det(A) = +a_{n,n}\det(A_{n-1}) = a_{n,n}a_{n-1,n-1}\det(A_{n-2}) =$$

Vilket till slut ger att $\det(A) = a_{n,n}a_{n-1,n-1}\cdots a_{1,1}$ Observera att diagonalelement har positivt tecken i determinantutvecklingen.

Uppgift 11

Låt Q vara en ortonormal matris, dvs

$$Q^TQ = QQ^T = I$$

a) För determinanter gäller $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ samt $\det(A^T) = \det(A)$. Dessutom vet vi att $\det(I) = 1$. För vår ortonormala matris har vi

$$\det(Q^TQ) = \det(Q^T)\det(Q) = \det(Q)^2 = 1$$

detta ger att $\det(Q) = \pm 1$.

b) Att Q är ortonormal betyder att

$$Q^TQ = QQ^T = I.$$

Om vi kallar kolumnerna till Q för $q_1, q_2, ..., q_n$ så är matris-matris multiplikationen Q^TQ given av (q_i, q_j) men detta är lika med identitetsmatrisen vilket medför att $q_1, q_2, ..., q_n$ är inbördes ortonormala, dvs $(q_i, q_j) = 0$ om $i \neq j$ och $(q_i, q_j) = 1$ om $i = j$.

c) Om Q^T skall vara ortonormal gäller att

$$(Q^T)^T Q^T = I$$

men detta följer direkt ur relationen för Q.

d) Eftersom en ortonormal matris har inbördes ortonormala kolumner och transponatet också är en ortonormal matris så måste det gälla att raderna är inbördes ortonormala också. (kolumnerna till den transponerade matris är den otransponerade matrisens rader.)

Uppgift 12

Skriv $z = x + iy$ där x och y är två reella tal.

a)

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2 y = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

b)

$$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2 \text{ Re } z$$

c)

$$z - \overline{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2i \text{ Im } z$$

d)

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

e) Skriv $z = re^{i\theta}$ och $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4+2ki\pi}$ med k ett heltal. Då ger ekvationen

$$z^2 = r^2 e^{2i\theta} = \sqrt{2}e^{i\pi/4+2ki\pi}$$

$$\Rightarrow r^2 = \sqrt{2} \Rightarrow r = 2^{1/4}$$

$$2i\theta = i\pi/4 + 2ki\pi \Rightarrow \theta = \pi/8 + k\pi$$

vilket ger oss de två rötterna

$$z_1 = 2^{1/4}e^{i\pi/8}$$

$$z_2 = 2^{1/4}e^{i(\pi/8+\pi)} = 2^{1/4}e^{9i\pi/8}$$

Uppgift 13

Låt $z_1 = 1 + i$ och $z_2 = 2 - i$ vara två komplexa tal. Beräkna följande, svara på formen $a + ib$.

a) $z_1 + z_2$

$$(1 + i) + (2 - i) = (1 + 2) + i(1 - 1) = 3$$

b) $z_1 z_2$

$$(1 + i)(2 - i) = 2 - i + 2i - ii = 2 - 3i + 1 = 3 - 3i$$

c) z_1/z_2

$$(1+i)/(2-i) = \frac{(1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = (2+i+2i+ii)/(4+1) = 1/5(1+3i) = 1/5+3/5i$$

d) z_1^{42}

$$(1+i)^{42} = (2^{1/2}e^{i\pi/4})^{42} = 2^{42/2}e^{\frac{42}{4}i\pi} = 2^{21}\cos(\frac{42}{4}\pi) + i2^{21}\sin(\frac{42}{4}\pi) = i2^{21}$$

e) $z_1 + \overline{z}_2$

$$(1+i)+(2+i) = 3+2i$$

Uppgift 14
Vi vet att $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$ samt att $\overline{a}_i = a_i$ (ty $a_i \in \mathbb{R}$) vilket betyder att:

$$\overline{P(z)} = P(\overline{z}).$$

Då har vi

$$0 = \overline{0} = \overline{P(z_1)} = P(\overline{z}_1).$$

viket visar att $\overline{z}_1$ är en rot om z_1 är en rot.
Uppgift 15

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $R(T)$ definieras av

$$R(T) = \{y \in \mathbb{R}^3 : y = Ax, x \in \mathbb{R}^3\}$$

Eftersom Tx kan tolkas som en linjärkombination av Ts kolumner med koefficienter x_1, x_2, x_3 och man direkt ser att 3:e kolumnen kan fås som summan av kolumn 1 och 2 måste $R(T)$ spännas upp av vektorerna $r_1 = (1,3,-2)$ och $r_2 = (3,4,2)$ och går genom origo. Planets normal kan då fås ur $n = r_1 \times r_2$

$$n = (14, -8, -5)$$

Planets ekvation ges då av

$$y \cdot n = 0$$

med n givet ovan.

b) $N(T)$ ges av

$$N(T) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Tx = 0, x \neq 0\}$$

Vi har här då att $Tx = 0$ leder till 3 st ekvationer

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$$

$$3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 0$$

$$-2x_1 + 2x_2 = 0$$

Vi ser också att den 3:e ekvationen kan fås som en linjärkombination av de två första. Dessa två ekvationer kan betraktas som ekvationen för två stycken plan med normalerna $n_1 = (1,3,4)$ och $n_2 = (3,4,7)$. Skärningen mellan två plan är ju en rät linje och denna linje kan skrivas på formen

$$x = \mu a$$

där a är linjens riktning och μ är ett tal i $\mathbb{R}$. a skall vara ortogonal mot både n_1 och n_2 och vi kan välja $a = n_1 \times n_2 = (5,5,-5)$.

Uppgift 16

a) Egenvärdena beräknas ur $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 9 = 0$$

$$2 - \lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 7 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 7} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{37}{4}}$$

b) Beräkna alla egenvektorer till A. Normalisera dessa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Vilket ger

$$x_1 + 3x_2 = \lambda x_1 \Rightarrow (1-\lambda)x_1 + 3x_2 = 0$$

$$3x_1 + 2x_2 = \lambda x_2 \Rightarrow 3x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0$$

Så vi har

$$x_2 = -\frac{1}{3}(1-\lambda)x_1$$

Den första egenvektorn blir då

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}(1 - (\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{37}{4}}))$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{37}{4}}) = \frac{1}{6}(1 - \sqrt{37})$$

För att skapa en normerad vektor behöver vi beräkna $||x||$.

$||x||^2 = 1+(1-\sqrt{37})^2/36 = 1+(1+37-2\sqrt{37})/36 = (36+1+37-2\sqrt{37})/36 = (74-2\sqrt{37})/36$

Den normerade vektorn blir då

$$g_1 = \frac{6}{\sqrt{(74 - 2\sqrt{37})}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{6}(1 - \sqrt{37}) \end{pmatrix}$$

På samma sätt kan egenvektor två räknas ut. (Det blev nog onödigt krångliga räkningar i detta exempel!). Vi dessutom att egenvektor två skall vara ortogonal mot g_1 vilket kan vara bra att kontrollera.

Uppgift 17

a) Egenvärdena beräknas ur $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 9 = 0$$

$$10 - 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 1} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49-4}{4}} = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}$$

b) Egenvektorerna räknas ut på samma sätt som i föregående uppgiften. Jag avstår från att göra det här. Precis som i förra uppgiften leder detta till en del trassliga uträkningar. Jag får välja bättre matriser till tentan.

Uppgift 18

a)

$$\lambda_i(g_i, g_j) = (\lambda_i g_i, g_j) = (Ag_i, g_j) =$$

$$(g_i, A^T g_j) = (g_i, Ag_j) = (g_i, \lambda_j g_j) = \lambda_j(g_i, g_j)$$

Vi har då följande

$$\lambda_i(g_i, g_j) = \lambda_j(g_i, g_j)$$

vilket implicerar att $(g_i, g_j) = 0$ om $\lambda_i \neq \lambda_j$.

b) Egenvärdena till A ges ur det karankteristiska polynomet

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Egenvärdena till $S^{-1}AS$ fås ur

$$\det(S^{-1}AS - \mu I) = \det(S^{-1}AS - \mu S^{-1}IS) =$$

$$\det(S^{-1}(A - \mu I)S) = \det(S^{-1})\det(A - \mu I)\det(S)$$

men $\det(S^{-1}) = 1/\det(S)$

$$\Rightarrow \det(S^{-1}AS - \mu I) = \det(A - \mu I) = 0$$

vilket ger samma karakteristiska polynom för A som för $S^{-1}AS$. Detta visar att de båda matriserna har samma egenvärden.

Uppgift 19

Basbytet innebär att

$$y = S\overline{y}, x = S\overline{x}$$

insatt i $y = Ax$ ger detta

$$S\overline{y} = AS\overline{x} \Rightarrow \overline{y} = S^{-1}AS\overline{x}$$

vilket ger att

$$\overline{A} = S^{-1}AS$$

Uppgift 20

a) `a*b'` Detta är en 1×3 matris multiplicerat med en 3×1 matris vilket skall ge en 1×1 matris som svar. Detta är alltså skalärprodukten mellan a och b.

```
a*b' =  [1 2 3] * [3
                   2
                   1] = 1*3 + 2*2 +3*1 = 3 + 4 + 3 = 10
```

b) `a'*b` Detta är en 3×1 matris multiplicerat med en 1×3 matris vilket skall ge en 3×3 matris som svar.

```
a'*b =  [1
         2
         3]* [3 2 1] =

= [ 1*3 1*2 1*1
    2*3 2*2 2*1
    3*3 3*2 3*1] =

= [ 3 2 1
    6 4 2
    9 6 3]
```

c) `a.*b` Detta är a “punktgånger” b dvs elementvis multiplikation. (Denna operation har vi ingen motsvarighet till i algebran). Svaret blir då en ny vektor av samma storlek som a och b. Operationen kan bara utföras om de båda argumenten är av samma storlek.

```
a.*b =  [1 2 3] .* [3 2 1] = [1*3 2*2 3*1] = [3 4 3]
```

Uppgift 21

a) `A*x'` Detta är en matris-vektor multiplikation

```
[1 2    [2   = [ 1*2 + 2*1  = [ 4
 3 2] *  1]      3*2 + 2*1]     8 ]
```

b) `A(:,2)'*x'` Detta blir en skalärprodukt

```
[2 2] * [2
         1] = 2*2 + 2*1 = 6
```

c) `x*A*x'` Vi har i uppgift a) beräknat `A*x'` vilket ger oss

```
[2 1] * [ 4
          8 ] = 2*4 + 1*8 = 16
```

Uppgift 22

a) `A*B(:,1)` Detta är en matris-vektor multiplikation mellan `A` och kolumnvektorn `B(:, 1)`.

```
 [1 2
  3 2] * [3
          1] =
[1*3 + 2*1
 3*3 + 2*1] =
[5
 11]
```

b) `A.*B` Detta är komponentvis multiplikation

```
[1 2    [3 4  = [ 1*3 2*4  = [ 3 8
 3 2] *  1 5]     3*1 2*5]     3 10]
```

c) `A*B'` Detta är `A` gånger transponatet till `B`

```
[1 2    [3 1  = [ 1*3+2*4 1*1+2*5  = [ 11 11
 3 2] *  4 5]     3*3+2*4 3*1+2*5]     17 13]
```

Uppgift 23

a) Observera tryckfelet i uppgiften, kodordet `function` skall komma först på raden. Notera också att argumentet `n` som är indata egentligen är överflödigt, `n` kan beräknas mha matlabs `size` kommando.

```
function y =  matVecMult(A, x, n)
% matVecMult - Matrix vector multiplication
%    Arguments:
%           A - an n by n matrix.
%           x - an n by 1 vector.
%           n - the size of A and x.
%    Returns:
%           y - A x, Matrix A multiplied by x.
%
   for i = 1: n
      y(i) = 0;
      for j = 1: n
         y(i) = y(i) + A(i, j) * x(j);
      end
   end
```

b) Hur många multiplikationer kräver denna rutin? För varje komponent av vektor `y` krävs det n-st multiplikationer. Vektorn har n komponenter så totalt krävs det n^2 multiplikationer för att utföra operationen.

Uppgift 24

Samma tryckfel i denna uppgift som i den föregående.

a)

```
function C = matMult(A, B, n)
% matMult - Matrix  multiplication
%    Arguments:
%           A - an n by n matrix.
%           B - an n by n matrix.
%           n - the size of A and B.
%    Returns:
%           C - A B, Matrix A multiplied by matrix B.
%
   for i = 1: n
      for j = 1: n
         C(i, j) = 0;
         for k = 1: n
            C(i, j) = C(i, j) + A(i, k) * B(k, j);
         end
      end
   end
```

b) Vi har tre stycken kapslade slingor, antalet multiplikationer är $nnn = n^3$.

Uppgift 25

Samma tryckfel i denna uppgift som i den föregående.

a) Vi skriver ut vad som händer

```
c = 0;
for i = 1: 2
   for j = 2: 2
      c = c + a(1, 2)*b(2);
   end
end
```

Vilket ger att `c = 0 + 2*2 = 4`. Den andra slingan kommer bara att genomlöpas för `i = 1`.

b) Hur många multiplikationer kräver denna rutin som funktion av `n`? För varje i sker $(n-i)$ st multiplikationer så totalt får vi

$$\sum_{i=1}^{n}(n-i) = n^2 - \sum_{i=1}^{n} i = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n^2-n}{2}$$

Uppgift 26

a) Kancellation är den feltillväxt som fås när två nästan lika stora tal subtraheras från varandra vid ändlig precision.

b) Se nedanstående uppgift.

Uppgift 27

a) En approximation till derivatan kan fås ur följande differensformel

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

b) Två fels som uppstår är dels ett approximationsfel. Formeln ovan ger en bättre och bättre approximation till f' ju mindre h blir. Det andra felet är den kancellation som uppstär när differensen tas mellan $f(x+h)$ och $f(x)$. Dessa tal närmare sig varandra med minskande h så kancellationsfelet blir större och större när h minskar.