Tentamenstal i Tekniska beräkningar Kf, HT 1999

—————-

Kurs: TMA 865 Tekniska beräkningar Kf

Tid: 991214 kl. 14.15-18.15

Plats: mg

Betygsgränser:
Maxpoäng på tentamen är 50 poäng. För betyg 3 erfodras 30 poäng. För betyg 4 krävs minst 36p, för betyg 5 minst 42p.
Dessa poänggränser gäller inklusive bonuspoäng från inlämningsuppgifterna.
Hjälpmedel:
Inga hjälpmedel är tillåtna.

Examinator och ansvarig lärare:
Klas Samuelsson, tel 772 5369

Rond och telefonvakt:
Johan Ivarsson, tel 0740-459022

Lösningar:
Svar och lösningar anslås på MD-sektionens anslagstavla senast 991215

—————-

Nedan följer ett antal typiska tentamenstal. Tentan kommer att bestå av 4 st 5 poängs uppgifter och 3 st 10 poängsuppgifter. Talen är att ses som representativa uppgifter.

—————-

Uppgift 1

Givet ett delrum V till $\mathbb{R}^n$ som har en bas v_j, dvs

$$V = \{w : w = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j, \lambda_j \in \mathbb{R}^n\}$$

a) Visa att $a + b \in V$ om $a, b \in V$.

b) Visa att $\mu a \in V$ om $a \in V, \mu \in \mathbb{R}$

Uppgift 2

Låt V vara ett delrum till $\mathbb{R}^n$. Låt P beteckna projektionen på V. En godtycklig vektor $x \in \mathbb{R}^n$ kan då skrivas som

$$x = Px + (x - Px)$$

a) Visa att $(x - Px, Px) = 0$

b) Visa att $||x||^2 = ||Px||^2 + ||x - Px||^2$

Uppgift 3

Låt V vara ett delrum till $\mathbb{R}^n$. Låt P beteckna projektionen på V. Projektionen definieras då av

$$(v - Pv, w) = 0, \text{ för alla } w \in V,$$

a) Visa att $PP = P$

b) Visa att $P^T = P$

Uppgift 4

Låt V vara ett delrum till $\mathbb{R}^n$. Låt P beteckna projektionen på V. Projektionen definieras då av

$$(v - Pv, w) = 0, \text{ för alla } w \in V,$$

a) Visa att $(v - Pv, w) = 0 \Rightarrow ||v - Pv|| \leq ||v - w||$, för alla $w \in V$. (Cauchy's olikhet $(a, b) \leq ||a||||b||$ kan antas vara känd).

b) Beskriv hur Pv kan beräknas.

Uppgift 5

Låt Q vara en ortonormal matris, dvs

$$Q^T Q = QQ^T = I$$

a) Visa att $(x, y) = (Qx, Qy)$

b) Vad betyder detta resultat.

Uppgift 6

Låt A vara en $m \times n$ matris med linjärt oberoende kolumner.

a) Visa att $A^T A$ är symmetrisk.

b) Visa att $A^T A$ är icke-singulär.

Uppgift 7

Låt A vara en $m \times n$ matris med linjärt oberoende kolumner.

a) Visa att $Ax = b$ har en lösning om $b \in R(A)$.

b) Om $b \notin R(A)$ så har $Ax = b$ ingen lösning. Då kan man istället söka följande minsta-kvadrat lösning

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} ||Ax - b||^2,$$

härled ett ekvationssystem ur vilket x kan bestämmas (normalekvationerna).

Uppgift 8

Betrakta ekvationssystemet $Ax = b$.

a) Beskriv i korthet principerna för Gausseliminering.

b) Vad är pivotering? när behövs detta.

c) Ungefär hur många operationer krävs för att utföra detta.

d) Antag att ett system med $n = 100$ tar 1 sekund att lösa på en viss dator. Ungefär hur lång tid skulle det då ta att lösa ett system med $n = 1000$.

Uppgift 9

Betrakta ekvationssystemet $Ax = b$. Antag nu att matrisen A är LU-faktoriserad, $A = LU$, (ingen pivotering har utförts).

a) Hur kan LU användas för att lösa ekvationen $Ax = b$ effektivt?

b) Hur många operationer krävs för att göra detta?

c) Beskriv hur kan detta användas för att räkna ut A^{-1}.

Uppgift 10

En matris A är övertriangulär, dvs

$$a_{ij} = 0, \text{ om } i > j$$

a) Visa hur $det(A)$ kan räknas ut för denna matris.

Uppgift 11

Låt Q vara en ortonormal matris, dvs

$$Q^T Q = QQ^T = I$$

a) Beräkna alla möjliga värden på $\det(Q)$

b) Om Q är ortonormal vad betyder det för Qs kolumner?

c) Visa att om Q är ortonormal så är också Q^T ortonormal.

d) Med ledning av c) vad kan sägas om Qs rader?

Uppgift 12

Låt z vara ett komplext tal.

a) Visa att $z\bar{z} = |z|^2$.

b) Visa att $z + \bar{z} = 2 \text{ Re } z$.

c) Visa att $z - \bar{z} = 2i \text{ Im } z$.

d) Om $z = 1 + i$ skriv upp z på polär form.

e) Lös följande ekvation $z^2 = 1 + i$

Uppgift 13

Låt $z_1 = 1 + i$ och $z_2 = 2 - i$ vara två komplexa tal. Beräkna följande, svara på formen $a + ib$.

a) $z_1 + z_2$

b) $z_1 z_2$

c) z_1 / z_2

d) z_1^{42}

e) $z_1 + \bar{z}_2$

Uppgift 14

Låt P vara ett polynom med reella koefficienter dvs

$$P(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k z^k$$

där a_k, $k = 0...n$ är reella tal. Visa att om z_1 är en rot till P dvs, $P(z_1) = 0$, så är $\bar{z}_1$ också en rot.

Uppgift 15

Betrakta en transformation från $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ givet av matrisen:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Visa att $R(T)$ är ett plan genom origo i $\mathbb{R}^3$ och härled ekvationen för detta plan.

b) Visa att $N(T)$ är en linje i $\mathbb{R}^3$ genom origo och härled en ekvation för denna linje.

Uppgift 16

Betrakta en matris A givet av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Beräkna alla egenvärden till A.

b) Beräkna alla egenvektorer till A. Normalisera dessa.

Uppgift 17

Betrakta en matris A givet av

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Beräkna alla egenvärden till A.

b) Beräkna alla egenvektorer till A. Normalisera dessa.

Uppgift 18

Betrakta en symmetrisk matris A.

a) Visa att två egenvektorer till A, g_i och g_j är ortogonala om motsvarande egenvärden λ_i och λ_j är skilda från varandra.

b) Visa att $S^{-1}AS$ har samma egenvärden som A för en godtycklig inverterbar matris S.

Uppgift 19

Betrakta en transformation från $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ givet av matrisen A. Det betyder att x avbildas till y genom matrismultiplikationen:

$$y = Ax$$

Om vi nu gör ett basbyte till en ny bas genom följande relation

$$x = S\bar{x}$$

Härled nu hur transformationen A kommer att se ut i den nya basen, dvs bestäm $\bar{A}$, där

$$\bar{y} = \bar{A}\bar{x}$$

Uppgift 20

Givet två vektorer `a, b`, i Matlab,

```
a = [1 2 3];
b = [3 2 1];
```

Beräkna vilket svar man skulle få om följande kommandon ges till Matlab:

a) `a*b'`

b) `a'*b`

c) `a.*b`

Uppgift 21

Givet en matris och en vektor `A, x`, i Matlab,

```
A = [1 2
     3 2];
x = [2 1];
```

Beräkna vilket svar man skulle få om följande kommandon ges till Matlab:

a) `A*x'`

b) `A(:,2)'*x'`

c) `x*A*x'`

Uppgift 22

Givet två matriser `A, B`, i Matlab,

```
A = [1 2
     3 2];
B = [3 4
     1 5];
```

Beräkna vilket svar man skulle få om följande kommandon ges till Matlab:

a) `A*B(:,1)`

b) `A.*B`

c) `A*B'`

Uppgift 23

Nedan är ett skelett till en matlab function som skall beräkna matris-vektor multiplikation.

```
y = function matVecMult(A, x, n)
% matVecMult - Matrix vector multiplication
%    Arguments:
%           A - an n by n matrix.
%           x - an n by 1 vector.
%           n - the size of A and x.
%    Returns:
%           y - A x, Matrix A multiplied by x.
%
```

a) Skriv själv hur denna matlab rutin skall se ut för att ge önskat resultat. Matrismultiplikationen skall göras med slingor dvs du får ej använda `y = A * x`.

b) Hur många multiplikationer kräver denna rutin?

Uppgift 24

Nedan är ett skelett till en matlab function som skall beräkna matris-matris multiplikation.

```
C = function matMult(A, B, n)
% matMult - Matrix  multiplication
%    Arguments:
%           A - an n by n matrix.
%           B - an n by n matrix.
%           n - the size of A and B.
%    Returns:
%           C - A B, Matrix A multiplied by matrix B.
%
```

a) Skriv själv hur denna matlab rutin skall se ut för att ge önskat resultat. Matrismultiplikationen skall göras med slingor dvs du får ej använda `y = A * B`.

b) Hur många multiplikationer kräver denna rutin?

Uppgift 25

Givet följande matlab function

```
c = function theFunction(A, b, n)
% theFunction - a function
%    Arguments:
%           A - an n by n matrix.
%           b - an n by 1 vector.
%           n - the size of A and b.
%    Returns:
%           c - ??
%
   c = 0;
   for i = 1: n
      for j = i+1: n
         c = c + a(i, j)*b(j);
      end
   end
```

a) Vad blir resultatet `c` om följande skrivs i matlab:

```
A = [1 2
     3 4];
b = [1 2];

c = theFunction(A, b, 2);
```

b) Hur många multiplikationer kräver denna rutin som funktion av `n`?

Uppgift 26

Vid flyttalsberäkningar kan kancellation påverka noggrannheten.

a) Vad är kancellation och när uppträder detta fenomen?

b) Ge ett exempel på kancellation.

Uppgift 27

Om man vill beräkna derivatan av en funktion $f(x)$ kan man göra detta mha numerisk derivering.

a) Beskriv en formel som numeriskt approximerar $f'(x)$.

b) Beskriv två fel, och deras orsak, som påverkar noggrannheten i denna approximation.