TMV035 Analys och linjär algebra K Kf Bt, del B, 2003–04–17. Lösningar.

Obs: på grund av ett misstag saknas två småuppgifter på skrivningen. Småuppgifter: nr 1–8. Stora uppgifter: nr 9, 12, 13. Poängsättningen kommer att justeras vid rättningen.

---

1. $\frac{1}{2}x^2\log(x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}$

2. $\arctan(1) = \pi/4$

3. $f(-x) = -f(x)$ för alla x. Exempel: $x,\ x^3,\ x^5,\ \sin(x)$.

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \left\{\begin{array}{c} z=-x \\ dz=-dx \end{array}\right\} = -\int_{a}^{0} f(-z)\,dz + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$
$$= \{f(-z) = -f(z)\} = -\int_{0}^{a} f(z)\,dz + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

4. $\log\left(2\dfrac{t-2}{t-1}\right)$ för $t > 2$.

5. $1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \dfrac{1}{5!}x^5 + \dfrac{1}{6!}x^6$

6. —

7. (b) $u(t) = u_0e^{-3t} + \int_0^t e^{-3(t-s)}b\,ds = u_0e^{-3t} + \frac{b}{3}(1-e^{-3t}) = (u_0 - \frac{b}{3})e^{-3t} + \frac{b}{3}$

8. —

---

9. (a) $R(A)$ är mängden av alla linjärkombinationer av kolonnerna i A, dvs

$$R(A) = \{y \in \mathbf{R}^4 : Ax = y,\ \text{för något } x \in \mathbf{R}^4\}.$$

(b) Vi lägger till b och c som extra kolonner i A:

$$[A\ b\ c] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Gauss eliminationsmetod leder till en trappstegsmatris:

$$[\hat{A}\ \hat{b}\ \hat{c}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekvationssystemet $Ax = b$ är alltså ekvivalent med systemet $\hat{A}x = \hat{b}$, dvs

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 3, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

med lösningarna $x_4 = s$, $x_3 = 0$, $x_2 = 1 - 2x_3 - 3x_4 = 1 - 3s$, $x_1 = 3 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 + 2s$, där s är godtycklig, dvs

$$x = \begin{bmatrix} 1+2s \\ 1-3s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet $Ax = c$ är ekvivalent med systemet $\hat{A}x = \hat{c}$, dvs

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 1, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -\tfrac{2}{5}, \\ x_3 &= \tfrac{2}{5}, \\ 0 &= 1, \end{aligned}$$

vilket saknar lösning.

(c) Resultatet i (b) visar att b men inte c tillhör $R(A)$.

(d) De tre första kolonnerna i trappstegsmatrisen $\hat{A}$ är linjärt oberoende och utgör en bas för dess värderum $R(\hat{A})$. Då utgör de tre första kolonnerna i A också en bas för dess värderum $R(A)$. Dvs vektorerna

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

är en bas för $R(A)$. Dess dimension är 3, vilket är detsamma som rangen för A.

12. (a) Om population nr 1 är ensam, dvs om $u_2 = 0$, så blir ekvation nr 1: $u_1'(t) = au_1(t)$ med lösningen $u_1(t) = u_1(0)\exp(at)$, dvs u_1 växer. På samma vis får vi att $u_2(t) = u_2(0)\exp(-ct)$, dvs u_2 dör ut om $u_1 = 0$. Alltså är u_1 antalet kaniner och u_2 antalet rävar.

(b) MATLAB m-fil:

```
function y=volterra(t,u)
a=.5; b=1; c=.2; d=1;
y=zeros(2,1);
y(1)= a*u(1)-b*u(1)*u(2);
y(2)=-c*u(2)+d*u(1)*u(2);
```

MATLAB kommandorad:

```
>> [t,U]=my_ode('volterra',[0 50],[.5;.3],1e-2);  plot(t,U), plot(U(:,1),U(:,2))
```

(c) De stationära lösningarna ges av $f(u) = 0$, dvs

$$\begin{aligned} au_1 - bu_1u_2 &= 0, \\ -cu_2 + du_1u_2 &= 0, \end{aligned}$$

med lösningarna $u_1 = u_2 = 0$ och $u_1 = c/d$, $u_2 = a/b$, dvs vi har två stationära lösningar: $\bar{u} = (0,0)$ och $\bar{u} = (c/d, a/b)$.

(d) Jacobi-matrisen är

$$f'(u) = \begin{bmatrix} a - bu_2 & -bu_1 \\ du_2 & -c + du_1 \end{bmatrix}.$$

(e) Välj till exempel $a = b = c = d = 1$ och $u^{(0)} = (2,2)$. Ett steg av Newtons metod:

Evaluera $\quad A = Df(2,2) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ och $b = -f(2,2) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

Lös ekvationssystemet $\quad Ah = b, \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$

Uppdatera $\quad u^{(1)} = u^{(0)} + h = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$

Vi närmar oss den ena lösningen $\bar{u} = (1,1)$!

13. Se boken.

/stig