Analys o linjär algebra

Fortsatt analys

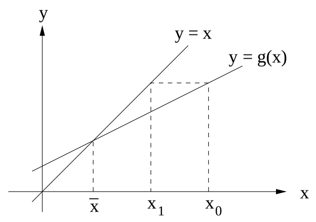
Konvergenshastighet

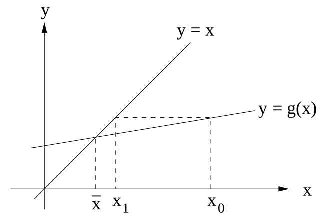
Har sett att bisektion och fixpktsiteration, under lämpliga förhållanden, ger en följd $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$, dvs $x_0, x_1, x_2, ..$ som *konvergerar* mot en lösning $\bar{x}$ till den givna ekv. $f(x) = 0$ eller $g(x) = x$.

Kan konvergens vara “olika snabb”?

Konvergenshastighet

Exempel:





Ju “flackare” grafen $y = g(x)$ är för x nära $\bar{x}$, ju snabbare konvergens. Extrem/trivialfallet $g(x)$ =konstant ger konvergens i ett enda steg $\bar{x} = x_1 = g(x_0)$.

Konvergenshastighet

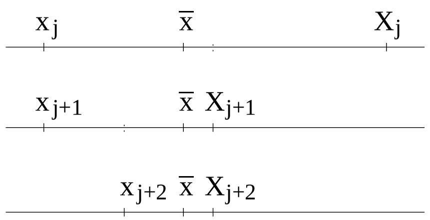
Ju mindre Lipschitz konstant g har, ju snabbare konvergens:

$$|x_{j+1} - x_j| = |g(x_j) - g(x_{j-1}| \leq L|x_j - x_{j-1}|.$$

T.ex. ger $L = \frac{1}{2}$ att resulterande avstånd till $\bar{x}$ *halveras* (eller bättre) i varje iteration. $L = \frac{1}{10}$ ger att avståndet *tiondelas*, dvs en ny decimal fixeras i varje iteration!

Konvergenshastighet

Även bisektion ger (i princip) en halvering av avståndet till $\bar{x}$ i varje steg:



Decasektion: ger på samma sätt en *tiondelning* av resterande avst. till $\bar{x}$ i varje iteration, see AMB&S avsn. 13.6.

Konvergenshastighet

Konvergens sådan att

$$|x_{j+1} - \bar{x}| \sim C|x_j - \bar{x}| \quad \text{med } C < 0\ !,$$

kallas *linjär*. Varje ny decimal kräver samma antal ytterligare iterationer. $C = \frac{1}{10}$ ger en ny decimal per iteration, $C = \frac{1}{2}$ ger en ny decimal per 3-4 iterationer. Kan det bli bättre?

Konvergenshastighet

Exempel: $x = g(x) = x^2$ med lösning $\bar{x} = 0$:

$$|x_{j+1}-\bar{x}| = |g(x_j)-g(\bar{x})| = |x_j^2-\bar{x}^2| = |(x_j+\bar{x})\,(x_j-\bar{x})| \le L\,|x_j-\bar{x}|,$$

där $L = |x_j + \bar{x}| = |x_j| \to 0$, dvs konvergensen blir snabbare och snabbare. Eftersom

$$|x_{j+1} - \bar{x}| = |x_j|^2 = |x_j - \bar{x}|^2$$

säger vi att vi har *kvadratisk* konvergens. Antalet fixerade decimaler *fördubbla* här i varje iteration! Kan mera allmänt säges gälla om

$$|x_{j+1} - \bar{x}| \sim C\,|x_j - \bar{x}|^2.$$

Konvergenshastighet

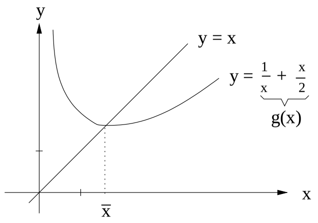
Ett mindre trivalt

Exempel: $x = g(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$, med lösning $\bar{x} = \sqrt{2}$:

$$|x_{j+1} - \bar{x}| = |x_{j+1} - \sqrt{2}| = |g(x_j) - g(\sqrt{2})| = |\tfrac{1}{x_j} + \tfrac{x_j}{2} - (\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{\sqrt{2}}{2})|$$
$$= |\tfrac{2+x_j^2-2\sqrt{2}\,x_j}{2\,x_j}| = \tfrac{1}{2\,|x_j|}\,|x_j - \sqrt{2}|^2,$$

dvs kvadratisk konvergens! Notera att i fall med kvadratisk konvergens är det inte lika kristiskt att “konstanten”, som här $C = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, är < 1, men det är ju förstås heller ingen nackdel!

Konvergenshastighet



Fixpktsiteration konv. kvadratiskt om grafen $y = g(x)$ helt horizontell i fixpunkten.

Exempel: Har sett att $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x) = x + \alpha\, f(x)$. Hur välja lämpligt α?

Konvergenshastighet

Har att

$$|x_{j+1} - \bar{x}| = |g(x_j) - g(\bar{x})| = |x_j + \alpha\, f(x_j) - (\bar{x} + \alpha\, f(\bar{x})| = |x_j - \bar{x} + \\ \leq |1 + \alpha\, \tfrac{f(x_j)-f(\bar{x})}{x_j-\bar{x}}|\, |x_j - \bar{x}|.$$

För konvergens måste α väljas så att funktionen framför $|x_j - \bar{x}|$ är < 1, och helst $<< 1$, dvs ≈ 0. Obs: Det “ideala” valet

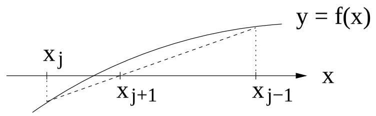
$$\alpha = -\frac{1}{x_j - \bar{x}} f(x_j) - f(\bar{x}) = -\frac{1}{\frac{f(x_j)-f(barx)}{x_j-\bar{x}}},$$

ej möjligt ty $\bar{x}$ okänd! Vad man *kan* göra är att välja

$$\alpha = \alpha_j := -\frac{x_j - x_{j-1}}{f(x_j) - f(x_{j-1})}.$$

Konvergenshastighet

Grafisk tolkning:



Den streckade linjen genom punkterna $(x_{j-1},\, f(x_{j-1}))$ och $(x_j,\, f(x_j))$ ges ju av

$$y - f(x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} (x - j - x_{j-1})$$

med $y = 0$ för

$$x = x_{j+1} = x_j - \frac{x_j - x_{j-1}}{f(x_j) - f(x_{j-1})} f(x_j).$$

Konvergenshastighet

Notera att denna metod inte riktigt är ngn fixpunkts iteration

$$x_{j+1} = g(x_j),$$

där ju högerleded bara skall bero på föregående x_j, och inte som här på de två föregående x-värdena. Metoden ger i alla fall kvadratisk konvergens.

Frågor att jobba vidare med:

- Hur hitta lämpliga x_0 och X_0?
- Hur hitta rätt lösning?

Konvergenshastighet

Example: Antag att vi söker lösn $\bar{x} = 1$ till

$$x = g(x) = x^2.$$

- Hur hitta alla lösningar?
- Vilken metod är bäst?
- Vad kan menas med bäst?

Resume

Resume:

Har betraktat *allmänna* ekv. av typ $f(x) = 0$ och $g(x) = x$, och försökt närma oss/*konstruera* lösningar $\bar{x}$ till dessa m.h.a. bisektion resp fixpunkts-iteration. Exempelvis kan vi vilja lösa ekv. $f(x) = 1 - 3x + x^3 = 0$ m.h.a. bisektion: Finner att $f(0) = 1$ är positivt, och att $f(1) = -1$ är negativt. Söker vidare och beräknar mittpunktsvärdet $f(0.5) = -\frac{3}{8}$ som är negativt, osv.

j	x_j	$f(x_j)$	X_j	$f(X_j)$
0	0	1	1	−1
1	0	1	0.5	−0.375
2	0.25	0.672..	0.5	−0.375
3	0.25	0.672..	0.375	
4	0.3125	0	0.375	
5				

Resume

Efter 4 iterationer har vi *konstruerat* den första decimalen i $\bar{x}$, dvs funnit att $\bar{x} = 0.3...$.Efter ytterligare 3-4 iterationer kan vi fixera en andra decimal, osv.

Följden $\{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ (liksom $\{X_j\}$) är en s.k. *Cauchy följd*, s.a.

$$|x_j - x_j| \le \epsilon,$$

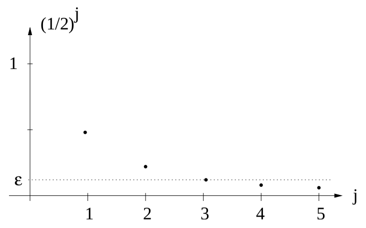
om bara $i, j \ge N(\epsilon)$. Här gäller ju att

$$|x_i - x_j| \le (\frac{1}{2})^j$$

och därmed för $i \ge j$

$$|x_i - x_j| \le (\frac{1}{2})^j$$

Resume



För ϵ som i figure gäller

$$|x_i - x_j| \le (\frac{1}{2})^j \le \epsilon$$

om bara $i, j \ge N$ med $N = 4$. Mindre ϵ kräver större $N = N(\epsilon)$.

Resume

Varje Cauchyföljd definierar succesivt fler och fler decimaler i ett bestämt reellt tal $\bar{x}$. Om t.ex. $(\frac{1}{2})^j \leq 10^{-8}$ och x_j har 7:e decimalen 5, så gäaller detta även för *alla* följande x_i med $i \geq j$ i följden till 5. (Viss tveksamhet kan råda om 8:e decimalen i x_j är 0 eller 9, vilket kan kräva att vi gtill senare x_j innan decimal 7 i $\bar{x}$ kan fixeras.)

Resume

Hur räknar man med $\bar{x}$, och hur vet vi att $\bar{x}$ löser den givna ekv.? Löste problemet elegant genom att *definiera*

$$f(\bar{x}) = f(\text{lim} x_j) \underbrace{=}_{!} \text{lim} f(x_j).$$

Resume

Gäller då att följden $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ med $y_j = f(x_j)$, dvs $\{f(x_j)\}_{j=0}^{\infty}$, *har* ett gränsvärde? Ja, (t.ex.) om f är Lipschitz kontinuerlig, dvs

$$|f(a) - f(b)| \leq L\,|a-b| \quad \text{för alla } a,b$$

som kan bli aktuella. Med $a = x_i$ och $b = x_j$ fås

$$|y_i - y_j| \leq L\,|x_i - x_j| \leq \epsilon,$$

om bara i,j tillräckligt stora, så att

$$L\,(\frac{1}{2})^j \leq \epsilon \quad \text{om } i \geq j.$$

Resume

Speciellt gäller detta för $f(x) = 1 - 3\,x + x^3$ och $a,b \in [0,1]$ ty

$$|f(a) - f(b)| = |1 - 3\,a + a^3 - (1 - 3\,b + b^3)| = |-3(a-b) + (a^2 + a\,b$$
$$\leq (3+3)\,|a-b| = l\,|a-b| \quad \text{med } L = 6.$$

Slutligen gäller att $\text{lim} f(x_j) = 0$ ty

$$|f(x_j)| \leq ||f(x_j) - f(X_j)| \leq L\,|x_j - X_j| = L\,(\frac{1}{2})^j \to 0 \quad \text{då } j \to \infty.$$

Bisektion ger alltså alltid en konvergent följd som tillför en ny decimal i $\bar{x}$ var 3:e-4:e iteration.

Resume

Fixpunktsiteration

$$x_{j+1} = g(x_j)$$

konvergent om g *kontraktion*, dvs om

$$|g(a) - g(b)| \leq L\,|a - b| \quad \text{med } L < 1.$$

Ju mindre L, ju snabbare konvergens.

Resume

Funktioner: Beteckningen $f : R \to R$ betyder att funktionen f tar (emot/kan matas med, vissa) reella tal $x \in R$ och ger reella värden $f(x)$, dvs $f(x) \in R$.

$D(f)$ är mängden av de x för vilka $f(x)$ är definierat, dvs precis de x man tillåts stoppa in i funktionen.

$R(f)$ är mängden av motsvarande värden $f(x)$, dvs $R(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$.

Resume

Med $f : R \times R \to R$ antyds att f är definierad för (vissa) *par* av reella tal $(x_1, x_2) \in R \rtimes R =: R^2$ med ett reellt värde $f(x_1, x_2) \in R$.
Obs: $\times$ betecknar här ingen produkt i vanlig mening. Ex: $f(x_1, x_2) = 2\,x_1 - x_1\,x_2$.

Resume

Har speciellt mött polynomfunktioner

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + .. + a_n\,x^n = \text{sum}_{j=0}^{n} a_j\,x^j.$$

I fallet $a_0 = a_1 = .. = a_n = 1$ ger detta en s.k. *geometrisk summa*

$$s = 1 + x + x^2 + .. + x^n = \text{sum}_{j=0}^{n}$$

som kan beräknas genom mult. m. $1 - x$:

$$(1 - x)\,s = 1 - x^{n+1},$$

dvs

$$s = \text{sum}_{j=0}^{n} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \quad \text{(för } x \neq 1).$$

Derivata och integral

Fokus: $f(x) = 0$, hitta x!

Lösn x kan vara (ett enda) tal, som i Dinner Soup med $x = 10/15$, eller ett *talpar* $x = (x_1, x_2)$ som i Dinner Soup/Ice cream problemet, (eller tal*tripel*, eller ..,)

eller en *funktion* $x = x(y)$ som i Dinner Soup med variabel budget y (\$) för sopp inköp, dvs ekv $f(x, y) = 15\,x - y = 0$ med lösn $x = x(y) = y/15$.

Det oberoende variabeln (här y (\$)) kan t.ex. också vara *tiden* t, och den beroende variabeln t.ex. en motsvarande *sträcka* $x = x(t)$.

Derivata och integral

Kommande fokus:

$$x'(t) = g(t), \quad x(t) = ?,$$

eller allmännare

$$x'(t) = g(x(t), t), \quad x(t) = ?,$$

där även *derivatan* $x'(t)$ av funktionen $x(t)$ ingår, och där g är en given funktion, här $g : R \to R$ resp $g : R \times R \to R$, och allmännare $g : R^d \times R \to R^d$ om $x = (x_1, x_2, .., x_d)$.

Derivata och integral

Notera att även dessa ekv kan skrivas på formen $f(x) = 0$, t.ex. med $f(x) = x' - g$, dvs

$$x(t) \overbrace{\to}^{f} x'(t) - g(t).$$

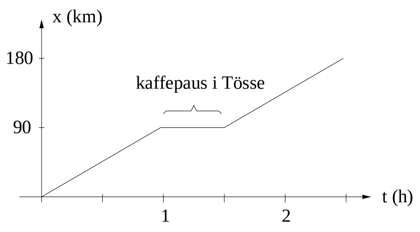
Derivata och integral

Nu inställer sig flera frågor:

- Vad *menas* med $x'(t)$?
- Hur beräknas $x'(t)$ från $x(t)$?
- Hur beräknas $x(t)$ givet att $x'(t) = g(t)$?

Derivata och integral

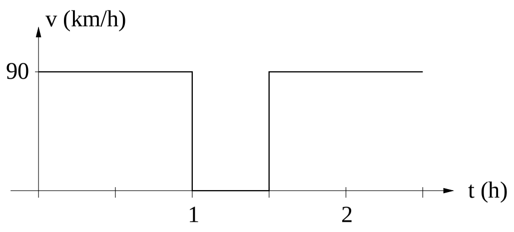
Exempel: Bilresa Trollhättan-Töcksfors, via Tösse, $x(t)$ sträckan efter tid t:



- Vilken har hastigheten $v = v(t)$ varit?
- Vad menas med hastighet?
- Hur beräknas $x = x(t)$ givet hastigheten $v = v(t)$?

Derivata och integral

I detta fall:



Erinrar oss att hastigheten är derivatan av sträckan, dvs att $v(t) = x'(t)$, där $x'(t)$ är "tillskottet i sträcka per tidsenhet" vid tiden t. Oklarheten vad gäller hastigheten vid $t = 1$ resp $t = 1.5$ leder oss att söka precisera begreppet *deriverbarhet*.

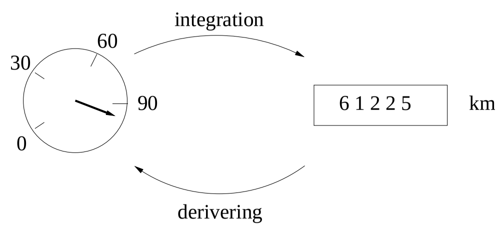
Derivata och integral

Lösningen på problemet hur man kan beräkna $x(t)$ givet $x'(\tau) = g(\tau)$ för $0 \leq \tau \leq t$, dvs beräkna sträckan $x(t)$ givet hastigheten $x'(\tau) = v(\tau)$, ges av *integralen*

$$x(t) = \int_0^t v(\tau)\, d\tau,$$

där $v(\tau)\, d\tau$ representerar *tillskott* i sträcka vid tiden τ under ett kort tidsintervall $d\tau$, och $\int_0^t v(\tau)\, d\tau$ representarar *summan* av alla dessa tillskott från tiden 0 till t.

Derivata och integral

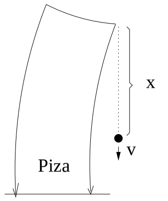


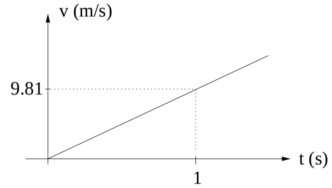
Derivata och integral

Exempel: Vid *fritt fall* ökar hastigheten med tiden. Hastighetesförändringen per tidsenhet $v'(t)$ kallas *accelerationen* och ges av gravitationskraften med

$$v'(t) = 9.81 \quad \text{(m/s}^2\text{)}$$

med lösning $v(t) = 9.81\,t \quad$ (m/s) vid given *begynnelsehastighet* $v(0) = 0$.





Derivata och integral

Vilken är fallsträckan $x = x(t)$ vid tiden t, nu givet att

$$x'(\tau) = v(\tau) = 9.81\,\tau \quad \text{för } 0 \le \tau \le t.$$

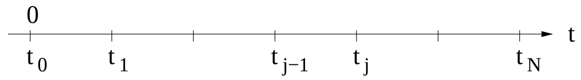
Verkar här rimligt att svaret ges av

$$x(t) = 9.81\,\frac{t}{2}\,t = 9.81\,\frac{t^2}{2},$$

där $9.81\,\frac{t}{2}$ representerar *medelhastigheten* under det aktuella tidsintervallet $[0, t]$.

Derivata och integral

Mera allmänt kan $x(t_N)$ beräknas m.h.a. indelning i mycket korta tidsintervall



sådana att

$$v(t_{j-1}) \approx v(t_j) \approx v(t) \text{ för } t_{j-1}) \le t \le t_j,$$

varvid bör gälla att

$$x(t_j) - x(t_{j-1}) \approx v(t_{j-1})\,(t_j - t_{j-1}),$$

alt.

$$x(t_j) - x(t_{j-1}) \approx v(t_j)\,(t_j - t_{j-1}).$$

Derivata och integral

Summation över $j = 1, 2, .., N$ ger

$$\begin{aligned}
x(t_N) &= x(t_{N-1}) + \overbrace{x(t_N) - x(t_{N-1})}^{\text{tillskott}} \\
&= x(t_{N-2}) + \overbrace{x(t_{N-1}) - x(t_{N-2})}^{\text{föreg. tillskott}} + \overbrace{x(t_N) - x(t_{N-1})}^{\text{tillskott}} \\
&= \underbrace{x(t_0)}_{=0} + \overbrace{x(t_1) - x(t_0)} + \overbrace{x(t_2) - x(t_1)} + .. + \overbrace{x(t_N) - x(t_{N-1})} \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{N} x(t_j) - x(t_{j-1}) \\
&\approx \textstyle\sum_{j=1}^{N} v(t_{j-1})\,(t_j - t_{j-1}) \\
&\approx \textstyle\sum_{j=1}^{N} v(t_j)\,(t_j - t_{j-1}),
\end{aligned}$$

dvs $x(t_N)$ kan beräknas m.h.a. upprepad summation.

Derivata och integral

Formeln

$$x(t_N) \approx \sum_{j=1}^{N} v(t_{j-1})\,(t_j - t_{j-1})$$

motsvaras av för “oändligt korta” tidsintervall av

$$x(t_N) = \int_0^{t_N} v(t)\,dt$$

där dt motsv. tidsintervallen $t_j - t_{j-1}$, och $\int_0^{t_N}$ summation av tillskotten $v(t)\,dt$ i fallsträcka mellan $t = 0$ och $t = t_N$, och där $\approx$ övergår i exakt $=$.

Derivata och integral

Exempel: $x'(t) = v(t) = 1 + t$ med begynnelsevillkoret $x(0) = 0$ ger

$$x(t_N) \approx \sum_{j=1}^{N} (1 + t_{j-1})\,(t_j - t_{j-1}),$$

dvs med $t_j - t_{j-1} =: k$, $t_j = j\,k$, fås (enl Leibschnitzel)

$$x(t_N) \approx \sum_{j=1}^{N} (1+(j-1)\,k)\,k = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} k}_{=Nk=t_N} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N} (j-1)\,k^2}_{\approx k^2N^2/2} \approx t_N + \frac{t_N^2}{2}.$$

Derivata och integral

Metoden kan generaliseras till ekv

$$x'(t) = g(x(t), t)\,:$$

Exempel: $x'(t) = x(t)$ med begynnelsevillkoret $x(0) = 1$

$$x(t_j) - x(t_{j-1}) \approx x(t_{j-1})\,\underbrace{(t_j - t_{j-1})}_{=:k}$$

ger

$$x(t_j) \approx (1 + k)\,x(t_{j-1}),$$

dvs

$$x(t_N) \approx (1 + k)^N\,x(t_0) = (1 + k)^N.$$

Derivata och integral

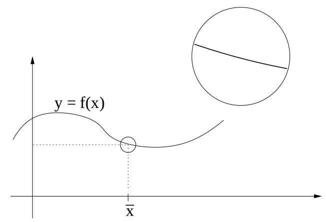
Speciellt erhålls för $k = 1/N$, $t_N = N\,k = 1$:

$$x(1) = (1 + \frac{1}{N})^N.$$

Notera: $(1 + \frac{1}{N})^N \rightarrow$ e då $N \rightarrow \infty$

Linearisering och Derivata

Definition av derivata. Observation: På tillräckligt korta intervall, t.ex. nära en given punkt $\bar{x}$, kan en funktion $f(x)$ i allmänhet betraktas som *linjär*:



Linearisering och Derivata

Vilken är den linjära (affina) funktion

$$y = m + k\,x$$

som bäst approximerar $y = f(x)$ för x nära $\bar{x}$?

Naturligt att välja m så att $m + k\,\bar{x} = \bar{y} = f(\bar{x})$, dvs $m = f(\bar{x}) - k\,\bar{x}$, dvs

$$y = f(\bar{x}) - k\,\bar{x} + k\,x = f(\bar{x}) + k\,(x - \bar{x}),$$

där vi nu går vidare för att hitta ett bra k-värde!

Linearisering och Derivata

Redan valet av m ger

$$f(x) = f(\bar{x}) + k\,(x - \bar{x}) + E_f(x, \bar{x}),$$

där

$$|E_f(x,\bar{x})| \le K_f(\bar{x}) \qquad \underbrace{|x - \bar{x}|}_{\text{litet f. } x \text{ nära } \bar{x}!}$$

ty

$$\begin{aligned} |E_f(x,\bar{x})| &= |f(x) - f(\bar{x}) - k\,(x - \bar{x})| \\ &\le |f(x) - f(\bar{x})| + |k|\,|x - \bar{x}| \le (L + |k|)\,|x - \bar{x}|, \end{aligned}$$

om bara f är Lipschitz.

Linearisering och Derivata

Fråga: Kan vi nu välja k så att

$$|E_f(x,\bar{x})| \le K_f(\bar{x}) \qquad \underbrace{|x - \bar{x}|^2}_{\text{mkt litet f } x \text{ nära } \bar{x}\text{ !}}$$

Om detta är fallet säger vi att $f(x)$ är *deriverbar* i $x = \bar{x}$ med derivatan $f'(\bar{x}) = k$.

Linearisering och Derivata

Exempel: $f(x) = x^2$. Finner att

$$E_f(x,\bar{x}) = x^2 - \bar{x}^2 - k\,(x-\bar{x}) = (x+\bar{x})\,(x-\bar{x}) - k\,(x-\bar{x}) \\ = (x+\bar{x}-k)\,(x-\bar{x}),$$

dvs för $k = 2\,\bar{x}$ gäller

$$E_f(x,\bar{x}) = (x-\bar{x})^2,$$

dvs $f(x) = x^2$ *är* deriverbar med derivatan $f'(\bar{x}) = 2\,\bar{x}$ för $x = \bar{x}$.

Linearisering och Derivata

Derivatan $f'(\bar{x})$ är alltså (riktningskoeff.) proportionalitetsfaktorn k i ett linjärt samband

$$y = f(\bar{x}) + k\,(x-\bar{x}),$$

alternativt

$$y - \bar{y} = k\,(x-\bar{x}),$$

som approximerar $y = f(x)$ med ett *fel* $E_f(x,\bar{x})$ sådant att

$$|E_f(x,\bar{x})| \leq K_f(\bar{x})\,|x-\bar{x}|^2$$

för x nära $\bar{x}$.

Linearisering och Derivata

Kan det finnas flera sådana k ?

Antag

$$f(x) = f(\bar{x}) + k_i\,(x-\bar{x}) + E_i, \quad i = 1,2.$$

Subtraktion ger

$$0 = (k_1 - k_2)\,(x-\bar{x}) + E_1 - E_2.$$

Division med $x-\bar{x}$ (f. $x \neq \bar{x}$) ger

$$k_2 - k_1 = \frac{E_1 - E_2}{x-\bar{x}}.$$

Men ..

Linearisering och Derivata

.. eftersom

$$|E_i| \leq K_i\,|x-\bar{x}|^2,$$

följer att

$$|k_2 - k_1| \leq (K_1 + K_2)\,|x-\bar{x}|,$$

för x nära $\bar{x}$, och då förstås speciellt för $x = \bar{x}$, varav följer att $k_2 = k_1$!

Linearisering och Derivata

Exempel: $f(x) = x^3$. Finner att

$$x^3 - \bar{x}^3 - k\,(x-\bar{x}) = (x^2 + x\,\bar{x} + \bar{x}^2 - k)\,(x-\bar{x}),$$

dvs för $k = 3\,\bar{x}^2$ erhålls

$$E_f = \underbrace{(x^2 + x\,\bar{x} - 2\,\bar{x}^2)}_{(x+2\bar{x})\,(x-\bar{x})}\,(x-\bar{x}),$$

dvs

$$|E_f(x,\bar{x})| = |x + 2\,\bar{x}|\,|x-\bar{x}|^2 \le K_f(\bar{x})\,|x-\bar{x}|^2$$

för x nära $\bar{x}$ om t.ex. $K_f(\bar{x}) = 3\,|\bar{x}| + 1$.

Linearisering och Derivata

Enklare:

$$x^3 = [\bar{x} + (x-\bar{x})]^3 = \bar{x}^3 + \overbrace{3\,\bar{x}^2}^{=:k}\,(x-\bar{x}) + \underbrace{3\,\bar{x}\,(x-\bar{x})^2 + (x-\bar{x})^3}_{=:E_f(x,\bar{x})}.$$

Dvs, $f(x) = x^3$ är deriverbar med derivatan

$$f^(\bar{x}) = 3\,\bar{x}^2.$$

Deriveringsregler

Exempel: $f(x) = x^n$, n naturligt tal. Utnyttjar nu att

$$(a+b)^n = a^n + n\,a^{n-1}\,b + \underbrace{\cdots}_{\text{delbart m } b^2}.$$

Vi finner att

$$x^n = [\bar{x} + (x-\bar{x})]^n = \bar{x}^n + \overbrace{n\,\bar{x}^{n-1}}^{f'(\bar{x})}\,(x-\bar{x}) + E_f(x,\bar{x}),$$

där

$$|E_f(x,\bar{x})| \le K_f(\bar{x})\,|x-\bar{x}|^2,$$

för x nära $\bar{x}$ för ngt $K_f(\bar{x})$.

Deriveringsregler

Exempel: $f(x) = \frac{1}{x}$. Finner att

$$E_f(x,\bar{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\bar{x}} - k\,(x-\bar{x}) = \frac{\bar{x}-x}{x\,\bar{x}} - k\,(x-\bar{x}) = (-\frac{1}{x\,\bar{x}} - k)\,(x-\bar{x}).$$

dvs för $k = -\frac{1}{\bar{x}^2}$ erhålls

$$E_f(x,\bar{x}) = (-\frac{1}{x\,\bar{x}} + \frac{1}{\bar{x}^2})\,(x-\bar{x}) = \frac{1}{x\,\bar{x}^2}\,(x-\bar{x})^2,$$

med

$$|E_f(x,\bar{x})| \le K_f(\bar{x})\,|x-\bar{x}|^2,$$

för x nära $\bar{x}$ om $\bar{x} \neq 0$ och $K_f(\bar{x}) = \frac{2}{|\bar{x}|^3}$, t.ex. Alltså

$$f'(\bar{x}) = -\frac{1}{\bar{x}^2}.$$

Deriveringsregler

Sammanfattningsvis: $f(x) = x^n$ deriverbar med derivatan $f'(x) = n\,x^{n-1}$ för naturliga tal n, liksom för $n = 0$, och $n = -1$ för $x \neq 0$. Skall senare se att samma formel giltig för n godtyckligt heltal, och senare även godtyckligt rationellt tal!.

Deriveringsregler

Om $f(x)$ deriverbar med derivatan $f'(x)$ så är även $(c\,f)(x) = c\,f(x)$ derivarbar med derivatan $c\,f'(x)$. Vidare är summan $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ av två deriverbara funktioner deriverbar med derivatan $f_1'(x) + f_2'(x)$.
Derivatan $f'(x)$ betecknas även $D f(x)$ och $\frac{df}{dx}(x)$.
Den senare beteckningen motiveras av följande metod för beräkning av $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$

Deriveringsregler

Har att

$$f(x) - f(\bar{x}) = f'(\bar{x})\,(x - \bar{x}) + E_f(x, \bar{x}).$$

Division med $x - \bar{x}$, $x \neq \bar{x}$, ger

$$f'(\bar{x}) = \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} + R_f(x, \bar{x}),$$

där

$$|R_f(x, \bar{x})| \leq |-\frac{E_f(x, \bar{x})}{x - \bar{x}}| \leq K_f(\bar{x})\,|x - \bar{x}|.$$

Dvs för x nära $\bar{x}$ gäller

$$f'(\bar{x}) = \frac{df}{dx}(x) \approx \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Deriveringsregler

Idealt skall man här ta $x = \bar{x}$, ty då fås likhet, men $\frac{0}{0}$ är svårt att beräkna!
Däremot gäller ju om $x_i \to \bar{x}$ då $i \to \infty$, t.ex. med $x_i = \bar{x} + \frac{1}{i}$, att

$$\lim_{i\to\infty} \tfrac{f(x_i) - f(\bar{x})}{x_i - \bar{x}} = \lim_{i\to\infty} [f'(\bar{x}) + R_f(x_i, \bar{x})]$$
$$= \lim_{i\to\infty} f'(\bar{x}) + \lim_{i\to\infty} R_f(x_i, \bar{x}) = f'(\bar{x}) + 0,$$

dvs

$$f'(\bar{x}) = \lim_{i\to\infty} \frac{f(x_i) - f(\bar{x})}{x_i - \bar{x}}.$$

Detta ger oss även en praktisk metod att *beräkna* $f'(\bar{x})$, om än inte helt problemfri.

Deriveringsregler

Exempel: ("analytisk" derivering) $f(x) = \sqrt{x}$:

$$\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x} = \frac{\sqrt{x_i}-\sqrt{x}}{x_i-x}$$

$$= \frac{(\sqrt{x_i}+\sqrt{x})\,(\sqrt{x_i}-\sqrt{x})}{(\sqrt{x_i}+\sqrt{x})\,(x_i-x)}$$

$$= \frac{x_i-x}{(\sqrt{x_i}+\sqrt{x})\,(x_i-x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x_i}+\sqrt{x}} \to \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

då $x_i \to x$, dvs $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Deriveringsregler

Numerisk derivering: Ofta kan vi endast beräkna $\tilde{y}_i \approx y_i = f(x_i)$ och $\tilde{y} \approx y = f(x)$, med fel s.a.

$$|\tilde{y}_i - y_i| \le \delta \quad \text{och} \quad |\tilde{y} - y| \le \delta.$$

För motsvarande *differenskvot*

$$\frac{\tilde{y}_i - \tilde{y}}{x_i - x} \approx f'(x)$$

gäller ..

Deriveringsregler

$$\left|\frac{\tilde{y}_i-\tilde{y}}{x_i-x} - f'(x)\right| = \left|\frac{\tilde{y}_i-y_i+y-\tilde{y}+y_i-y}{x_i-x} - f'(x)\right|$$

$$= \left|\frac{\tilde{y}_i-y_i}{x_i-x} + \frac{y-\tilde{y}}{x_i-x} + \underbrace{\frac{y_i-y}{x_i-x} - f'(x)}_{R_f(x_i,x)}\right| \le \frac{2\delta}{|x_i-x|} + K_f(x)\,|x_i-x|,$$

som minimeras om $\frac{2\delta}{|x_i-x|} \approx K_f(x)|x_i-x|$, dvs om $|x_i-x|^2 \approx \frac{2\delta}{K_f(x)}$. T.ex. gäller i Matlab att $\delta \approx 10^{-16}$, så i ett fall med $K_f(x) \approx 2$ bör man välja $|x_i - x| \approx 10^{-8}$.

Derivata

Likformigt differentierbar:
Exempel: Betrakta $f(x) = \frac{1}{x}$ på intervallet $I = (0,1]$, med $f'(\bar{x}) = -\frac{1}{\bar{x}^2}$. För $x, \bar{x} \in I$ gäller ju som vi sett

$$f(x)-f(\bar{x})-f'(\bar{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\bar{x}} - (-\frac{1}{\bar{x}^2})\,(x-\bar{x}) = .. = \underbrace{\frac{1}{x\,\bar{x}^2}\,(x-\bar{x})^2}_{E_f(x,\bar{x})},$$

med

$$|E_f(x,\bar{x})| = \left|\frac{1}{x\,\bar{x}^2}\,(x-\bar{x})^2\right| \le K_f(\bar{x})\,|x-\bar{x}|^2,$$

för x nära $\bar{x}$, om vi t.ex. tar $K_f(\bar{x}) = \frac{2}{\bar{x}^3}$.

Derivata

Vi noterar att $K_f(\bar{x})$ blir större för $\bar{x}$ nära 0, och att det *inte* verkar finnas något K_f *oberoende* av $\bar{x}$ s.a.

$$|E_f(x,\bar{x})| \le K_f(\bar{x})\,|x-\bar{x}|^2$$

för x nära $\bar{x}$.

I de fall då det *finns* ett sådant K_f säger vi att $f(x)$ är *likformigt* differentierbar på I.

Derivata

Sats: Om $f(x)$ likformigt differentierbar på I med derivata $|f'(x)| \le L$ för $x \in I$, så gäller

$$|f(a)-f(b)| \le L|a-b| \quad \text{för } a,b \in I,$$

dvs $f(x)$ är Lipschitz med konstant L (samma som i $|f(x)| \le L$).

Beviset finns i boken, ganska långt, men kul!!
Visar här att $f(x)$ är Lipschitz om I har ändlig längd $= d$, vilket är enklare.

Derivata

Vi har

$$\begin{aligned}|f(a)-f(b)| &= |f'(b)\,(a-b)+E_f(a,b)|\\ &\le |f'(b)\,(a-b)|+|E_f(a,b)|\\ &\le L|a-b|+K_f\,|a-b|^2 \le (L+K_f\,d)\,|a-b|\end{aligned}$$

för $a,b\in I$, dvs $f(x)$ Lipschitz på I med konstant $L+K_f\,d$.

Beviset i allmänna fallet bygger på att dela in I i korta delintervall av längd d, och "låta d gå mot noll".

Derivata

Avslutningsvis noterar vi att att en Lipschitz kontinuerlig funktion på ett *ändligt* (långt) intervall$I$ med längd $d<\infty$, måste vara *begränsad*, dvs finns tal $M<\infty$ s.a.

$$|f(x)| \le M \quad \text{för alla } x\in I.$$

För beviset noterar vi helt enkelt att

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |f(x)-f(\bar{x})+f(\bar{x})| \le |f(x)-f(\bar{x})|+|f(\bar{x})|\\ &\le L|x-\bar{x}|+|f(\bar{x})| \le L\,d+|f(\bar{x})| = M,\end{aligned}$$

för alla $x\in I$.

Derivata

Exempel: Funktionen $f(x)=\frac{1}{x}$ på intervallet $(0,1]$ är *inte* begränsad. Beviset ovan faller på att $f(x)$ *inte* är Lipschitz kontinuerlig.
Exempel: Funktionen $f(x)=\sqrt{x}$ på $[0,1]$ är inte Lipschitz, men ändå begränsad.

Deriveringsregler

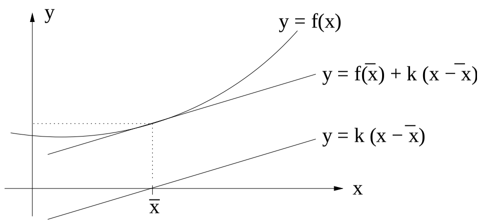
Erinrar oss: $f(x)$ deriverbar i $\bar{x}$, med derivatan $f'(\bar{x})=k$, om

$$f(x)=f(\bar{x})+k\,(x-\bar{x})+E_f(x,\bar{x})$$

och

$$|E_f(x,\bar{x})|\le K\,|x-\bar{x}|^2$$

för x nära $\bar{x}$ för ngt $K=K_f(\bar{x})$.



Deriveringsregler

Om

$$f(x)=f(\bar{x})+f'(\bar{x})\,(x-\bar{x})+E_f$$

och

$$g(x)=g(\bar{x})+g'(\bar{x})\,(x-\bar{x})+E_g,$$

följer att

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$$

och

$$(cf)'(x)=c\,f'(x)\quad \text{för konstanter } c.$$

Övning: Visa detta!!
Exempel: $D(x^2+\frac{1}{x})=2\,x-\frac{1}{x^2}$, $D(7\,x^3)=7\,3\,x^2=21\,x^2$.

Deriveringsregler

Produktderivering: $(f\cdot g)'(x)=$?
Från ovan:

$$f(x)g(x)=[f(\bar{x})+f'(\bar{x})\,(x-\bar{x})+E_f]$$

normalstora   små   jättesmå

$$\times\quad [g(\bar{x})+g'(\bar{x})\,(x-\bar{x})+E_g]$$

$$=f(\bar{x})g(\bar{x})+[f'(\bar{x})\,g(\bar{x})+f(\bar{x})\,g'(\bar{x})]\,(x-\bar{x})+E_{fg},$$

där

$$|E_{fg}(x,\bar{x})|\le K_{fg}(\bar{x})\,|x-\bar{x}|^2,$$

för x nära $\bar{x}$, för ngt $K_{fg}(\bar{x})$.
Övning: Visa detta!!

Deriveringsregler

Slutsats: $(f \cdot g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x})\, g(\bar{x}) + f(\bar{x})\, g'(\bar{x})$

Exempel:

$$D[\underbrace{(x^2+1)}_{f}\;\underbrace{(3-x)}_{g}] = \underbrace{2\,x}_{f'} \cdot \underbrace{(3-x)}_{g} + \underbrace{(x^2+1)}_{f} \cdot \underbrace{(-1)}_{g'}$$
$$= .. = -3\,x^2 + 6\,x - 1.$$

Kontroll: $(x^2+1)\,(3-x) = -x^3 + 3\,x^2 - x + 3$ har derivatan $-3\,x^2 + 6\,x - 1$. Stämmer!

Deriveringsregler

Derivering av *sammansatt funktion*

$$x \xrightarrow{g} g(x) = y \xrightarrow{f} f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = z.$$

Fråga: $(f \circ g)'(x) =$?

Vi har

$$g(x) = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})\,(x-\bar{x}) + E_g,$$
$$f(y) = f(\bar{y}) + f'(\bar{y})\,(y-\bar{y}) + E_f.$$

För $\bar{y} = g(\bar{x})$ och $y = g(x)$ erhålls

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(\bar{x})) + f'(g(\bar{x}))\,[g'(\bar{x})\,(x-\bar{x}) + E_g] + E_f \\ &= f(g(\bar{x})) + f'(g(\bar{x}))\,g'(\bar{x})\,(x-\bar{x}) + E_{f\circ g}(x,\bar{x}), \end{aligned}$$

där ..

Deriveringsregler

$$\begin{aligned} &|E_{f\circ g}(x,\bar{x})| = |f'(g(\bar{x}))\,E_g(x,\bar{x}) + E_f| \\ &\le |f'(g(\bar{x}))|\,K_g(\bar{x})\,|x-\bar{x}|^2 \\ &+ K_f(g(\bar{x}))\,|g(x)-g(\bar{x})|^2, \end{aligned}$$

dvs om $g(x)$ Lipschitz så att

$$|g(x) - g(\bar{x})| \le L|x - \bar{x}|$$

gäller

$$|E_{f\circ g}(x,\bar{x})| \le K_{f\circ g}(\bar{x})\,|x-\bar{x}|^2,$$

för x nära $\bar{x}$ om

Deriveringsregler

$$K_{f\circ g}(\bar{x}) := |f'(g(\bar{x}))|\,K_g(\bar{x}) + L^2\,K_f(g(\bar{x})),$$

dvs $f(g(x))$ är deriverbar med derivatan

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x).$$

Faktorn $g'(x)$ kallas här *inre derivatan*.

Deriveringsregler

Exempel: För $g(x) = x^2 + 1$, $f(y) = y^3 - 7\,y$ fås

$$(f \circ g)'(x) = (3\,y^2 - 7)\,2\,x,$$

där $y = g(x) = x^2 + 1$, dvs

$$(f \circ g)'(x) = f(g(x))' = \underbrace{(3\,(x^2+1)^2 - 7)}_{f'(g(x))}\,\underbrace{2\,x}_{g'(x)}.$$

Deriveringsregler

Deriveringsregeln uttrycks ofta

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx},$$

där alltså $z = f(y)$ och $y = g(x)$, och kallas *kedjeregeln*.
Exempel: $y = x^2 + 1$, $z = y^3 = (x^2+1)^3$ ger

$$\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 3\,y^2\,2x = 3\,(x^2+1)\,2x.$$

Deriveringsregler

Exempel: $u = f(z)$, $z = g(y)$, $y = h(x)$, dvs $u = f(g(h(x)))$ ger

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz}\,\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx},$$

t.ex.

$$D((1-3x)^2+1)^5 = 5((1-3x)^2+1)^4\,2(1-3x)\,(-3).$$

Deriveringsregler

Exempel: $f(y) = \frac{1}{y}$, $y = g(x)$ ger

$$(\frac{1}{g(x)})' = -\frac{1}{y^2}\,g'(x) = -\frac{1}{g(x)^2}\,g'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.$$

Exempel: $Dx^{-m} = D(\frac{1}{x^m}) = -\frac{mx^{m-1}}{(x^m)^2} = -mx^{-m-1}$, dvs regeln $Dx^n = nx^{n-1}$ giltig även för negativa heltal n.

Deriveringsregler

Derivering av kvot

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\,\frac{1}{g(x)},$$

Alltså,

$$(\frac{f}{g})'(x) = D[f(x)\,\frac{1}{g(x)}] = f'(x)\,\frac{1}{g(x)} + f(x)\,(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}) = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}.$$

Exempel:

$$D\frac{x^2}{1-x^3} = \frac{2x\,(1-x^3) - x^2\,(-3x^2)}{(1-x^3)^2}.$$

Derivata

Högre ordnings derivor:
Funktionen $h(x) = f'(x)$ kan i sin tur deriveras:

$$h'(x) = D\,f'(x) = f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}(x).$$

Exempel: $f(x) = x^3$ ger

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 3\,2x = 6x,$$
$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = 6, \quad f^{(4)}(x) = 0.$$

Exempel: $f(x) = x^{-1}$ ger

$$f'(x) = (-1)x^{-2}, \quad f''(x) = (-1)(-2)x^{-3}, ..$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)..(-n)x^{-n-1} = (-1)^n\,n!\,x^{-n-1}.$$

Derivata

Höger/vänster derivata: Om

$$f(x) = f(\bar{x}) + k\,(x-\bar{x}) + E_f$$

med

$$|E_f| \leq K\,|x-\bar{x}|^2,$$

för x nära $\bar{x}$ sådana att $x \geq \bar{x}$ säger vi att $f(x)$ har *höger derivata* $f'_+(\bar{x}) = k$ i $\bar{x}$.
Exempel: $f(x) = |x|$ är inte deriverbar i $x = 0$ men har högerderivata $f'_+(0) = 1$ och vänsterderivatan $f'_-(0) = -1$ för $x = 0$.
En funktion kallas deriverbar på ett intervall $I = [a, b]$ om den är deriverbar för $a < x < b$ och högerderiverbar resp vänsterderiverbar i a och b., om dessa ingår i intervallet.

Deriveringsregler

Derivering av x^r, $r = p/q$ rationellt tal: Erinrar oss att $y = g(x) = x^r = x^{p/q} = (x^p)^{1/q}$ är lösningen till

$$y^q = x^p,$$

dvs

$$(g(x))^q = x^p.$$

Derivering m.a.p. x ger

$$q\,(g(x))^{q-1}\,g'(x) = p\,x^{p-1},$$

dvs

$$g'(x) = \frac{p\,x^p}{q\,(x^{p/q})^{q-1}} = \frac{p\,x^{p-1}}{q\,x^{p-p/q}} = \frac{p}{q}\,x^{\frac{p}{q}-1} = r\,x^{r-1}.$$

Samma deriveringsregel som för heltalsexponenter!!

Deriveringsregler

Exempel: $Dx^{-2/3} = (-2/3)x^{-5/3}$.

Exempel: $Dx^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}}$, dvs $D\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ som tidigare.